УДК 539.12

ОБ АСИМПТОТИКЕ ПРИ ИНКЛЮЗИВНОМ РОЖДЕНИИ АНТИЯДЕР И ЯДЕРНЫХ ФРАГМЕНТОВ

О.С.Космачёв[1]

Получены и анализируются аналитические выражения сечений для инклюзивного рождения антиядер и ядерных фрагментов.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ

On Asymptotics in Inclusive Production of Antinuclei and Nuclear Fragments

O.S.Kosmachev

Analytical expressions for the inclusive production cross sections of antinuclei and nuclear fragments are obtained and analysed.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

1. ВВЕДЕНИЕ

Релятивистская ядерная физика в нынешнем ее понимании [1] находится на таком этапе своего развития, когда строительство и ввод в эксплуатацию новых ускорителей порождает ожидание новой физики. Естественной альтернативой растущей дороговизне ускорительной индустрии является бóльшая продуманность и увеличение точности эксперимента до такой степени, когда можно будет на основе опыта делать выбор между различными моделями, принимать или отвергать гипотезы, лежащие в их основе.

Другой возможностью интенсификации (и в конечном итоге достижения экономической оправданности и целесообразности) исследований по релятивистской ядерной физике является предсказательная способность моделей и выявление на этой основе приоритетов в постановке ускорительных экспериментов.

Данная работа посвящена дальнейшему исследованию характеристик и возможностей модели, предложенной ранее [1], [2] и описывающей инвариантное сечение взаимодействия релятивистских ядер на энергетическом интервале шириной до 8 порядков.

[1]E-mail: kos@thsun1.jinr.ru

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В результате большого цикла работ, связанных с процессами адронообразования, было установлено, что сечение инклюзивных реакций вида

$$I + II \longrightarrow 1 + 2 + ...$$

при столкновении релятивистских ядер I и II для различных типов детектируемых частиц 1 описывается формулой [1]

$$\frac{d^2\sigma}{m_T dm_T dy} = 2\pi C_1 A_I^{1/3+N_I/3} A_{II}^{1/3+N_{II}/3} exp[-\Pi/C_2]. \tag{1}$$

Здесь C_1, C_2 — известные константы; N_I и N_{II} — эффективные числа нуклонов, участвующих в ядерном столкновении.

Обобщенный параметр подобия Π находится из требования минимума этой величины при условии выполнения закона сохранения энергии

$$\Pi = min[1/2 \cdot \sqrt{(u_I N_I + u_{II} N_{II})^2}], \tag{2}$$

где u_I, u_{II} — 4-скорости ядер I и II. Это эквивалентно двум равенствам.

Первое — закон сохранения энергии

$$N_I N_{II} - \Phi_I N_I - \Phi_{II} N_{II} = \Phi_\delta, \tag{3}$$

где

$$\Phi_I = \frac{(m_1/m_0)(u_I u_1) + (\Delta/m_0)}{[(u_I u_{II}) - 1]}; \quad \Phi_{II} = \frac{(m_1/m_0)(u_{II} u_1) + (\Delta/m_0)}{[(u_I u_{II}) - 1]};$$

$$\Phi_\delta = \frac{(\Delta/m_0)^2 - (m_1/m_0)^2}{[(u_I u_{II}) - 1]};$$

$\Delta = m_1$ в случае рождения антиядер и K^--мезонов; $\Delta = -m_1$ для ядерных фрагментов;

$\Delta = 0$ для π-мезонов и струй; $(u_I u_{II}) = Cosh2Y$; $(u_I u_1) = (m_T/m_1)Cosh(Y + y)$; $(u_{II} u_1) = (m_T/m_1)Cosh(Y - y)$; $m_T = \sqrt{m_1^2 + p_T^2}$; m_0-масса нуклона.

Требование условного экстремума означает равенство нулю частных производных по N_I и N_{II} для функции

$$M(N_I, N_{II}) = \Pi + \lambda\varphi, \tag{4}$$

где λ — т.н. множитель Лагранжа, и

$$\varphi = N_I N_{II} - \Phi_I N_I - \Phi_{II} N_{II} - \Phi_\delta.$$

Это дает второе равенство

$$N_I^2 + [(u_I u_{II})\Phi_I - \Phi_{II}]N_I = N_{II}^2 + [(u_I u_{II})\Phi_{II} - \Phi_I]N_{II}. \tag{5}$$

Совместное решение (3) и (5) дают величины N_I и N_{II}, доставляющие экстремум величины П. В общем случае 2 уравнения второго порядка эквивалентны двум уравнениям четвертого порядка для разделенных переменных. Поэтому удобно, следуя [3] (см. также [2], [4]), ввести новые переменные

$$F_I = (\frac{N_I}{\Phi_{II}}) - 1, \qquad F_{II} = (\frac{N_{II}}{\Phi_I}) - 1.$$

Тогда уравнение (3) принимает вид

$$F_I F_{II} = 1 + \frac{\Phi_\delta}{(\Phi_I \Phi_{II})} = a \tag{6}$$

Требование условного экстремума (4) при учете закона сохранения энергии приводит к уравнению

$$F_I^4 + [1 + \frac{(u_I u_{II})}{z}]F_I^3 - (\frac{a}{z})[(u_I u_{II}) + (\frac{1}{z})]F_I - \frac{a^2}{z^2} = 0, \tag{7}$$

где $z = \frac{\Phi_{II}}{\Phi_I}$, и далее

$$F_{II}^4 + [1 + (u_I u_{II})z]F_{II}^3 - (az)[(u_I u_{II}) + z]F_{II} - a^2 z^2 = 0. \tag{8}$$

Из выражений (3) и (5) очевидно, что в случае рождения антиядер, K^-- мезонов ($\Delta = m$) и ядерных фрагментов ($\Delta = -m$), когда $\Phi_\delta = 0$, система (3) – (4) становится однородной. Поэтому она имеет тривиальное решение $N_I = N_{II} = 0$, что равносильно $F_I = F_{II} = -1$. Поделив (7) и (8) соответственно на $(F_I + 1)$ и $(F_{II} + 1)$ получаем уравнения третьей степени

$$F_I^3 + (u_I u_{II})\frac{1}{z}F_I^2 - (u_I u_{II})\frac{1}{z}F_I - \frac{1}{z^2} = 0 \tag{9}$$

и

$$F_{II}^3 + (u_I u_{II})zF_{II}^2 - (u_I u_{II})zF_{II} - z^2 = 0. \tag{10}$$

Закон сохранения энергии в данном случае принимает вид

$$F_I F_{II} = 1 \tag{11}$$

Коэффициенты уравнений (9) и (10) являются действительными величинами и не меняют знаки в физически допустимых областях их изменений. На основе стандартного алгоритма вычисления дискриминанта алгебраического уравнения [5] можно убедиться, что оба уравнения имеют три реальных корня. При этом как в (9), так и в (10) происходит одна смена знака в последовательности коэффициентов уравнения. По правилу Декарта [5] это означает, что каждое уравнение имеет, как минимум, по одному положительному корню. При замене $F_{I,II} \to -F_{I,II}$ знаки в той же последовательности коэффициентов меняются дважды, что означает наличие двух отрицательных корней. В связи с этим следует отметить, что закону сохранения энергии не противоречат как положительные, так и отрицательные решения, если выбирать одновременно только положительные или только отрицательные. Причем имеется три пары таких решений. Это обстоятельство делает необходимым анализ достаточных условий, т.е. детализацию того, что означает экстремум.

3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Важным исходным положением модели является требование условного минимума функции П. Выполненная выше процедура минимизации гарантирует выполнение экстремальности, т.е. является необходимым условием. Как известно [6], достаточным условием условного минимума является положительная определенность формы $J > 0$ в точке минимума $(N_I^{(i)}, N_{II}^{(k)}), i, k = 1, 2, 3$:

$$J = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 M(N_I^{(i)}, N_{II}^{(k)})}{\partial N_I \partial N_{II}} h_I^{(i)} h_{II}^{(k)}, \tag{12}$$

где $h_I^{(i)} = N_I - N_I^{(i)}$, $h_{II}^{(k)} = N_{II} - N_{II}^{(k)}$ достаточно малые величины.

Такого сорта анализ для центральной области быстрот выполнен в [7], откуда становится ясно, что все вычисления значительно упрощаются, если с самого начала учесть конкретику рассматриваемой задачи: $\Phi_\delta = 0$, $F_I F_{II} = 1$. Действительно, в данном случае П становится явной функцией либо F_I, либо F_{II}. Учитывая (2) и то, что $N_I = (F_I + 1)\Phi_{II}$,
$N_{II} = (F_{II} + 1)\Phi_I$, получаем

$$\Pi = \Pi'(F_I) = min\left(\frac{[F_I + 1]\Phi_{II}}{2F_I} \sqrt{F_I^2 + \frac{2(u_I u_{II})}{z} F_I + \frac{1}{z^2}}\right). \tag{13}$$

Аналогично

$$\Pi = \Pi''(F_{II}) = min\left(\frac{[F_{II} + 1]\Phi_I}{2F_{II}} \sqrt{F_{II}^2 + 2(u_I u_{II}) z F_{II} + z^2}\right). \tag{14}$$

Тогда требование экстремума перестает быть условным, и из обычных условий экстремума

$$\frac{d\Pi'(F_I)}{dF_I} = 0, \qquad \frac{d\Pi''(F_{II})}{dF_{II}} = 0 \tag{15}$$

получаем уравнения (9) и (10). Достаточные условия минимума при этом значительно упрощаются и сводятся к положительной определенности вторых производных в точках экстремума $F_I^{(i)}, F_{II}^{(k)}$

$$\frac{d^2\Pi'(F_I^{(i)})}{dF_I^2} > 0, \qquad \frac{d^2\Pi''(F_{II}^{(k)})}{dF_{II}^2} > 0. \tag{16}$$

С учетом (15) получаем следующие выражения, справедливые в точке экстремума:

$$\frac{d^2\Pi'(F_I)}{dF_I^2} = \frac{\Phi_{II}}{2} \cdot \frac{[3F_I^2 + 2\big((u_I u_{II})/z\big)F_I - \big((u_I u_{II})/z\big)]}{F_I^2 \sqrt{F_I^2 + 2\big((u_I u_{II})/z\big)F_I + (1/z^2)}}, \tag{17}$$

$$\frac{d^2\Pi''(F_{II})}{dF_{II}^2} = \frac{\Phi_I}{2} \cdot \frac{[3F_{II}^2 + 2(u_I u_{II}) z F_{II} - (u_I u_{II}) z]}{F_{II}^2 \sqrt{F_{II}^2 + 2(u_I u_{II}) z F_{II} + z^2}}. \tag{18}$$

Для оценки знака, например, выражения (18) умножим и разделим его на F_{II} и воспользуемся равенством (10). В результате получаем, что числитель содержит решения с положительными коэффициентами только

$$\frac{d^2\Pi''(F_{II})}{dF_{II}^2} = \frac{\Phi_I}{2}\cdot\frac{[2F_{II}^3+(u_Iu_{II})zF_{II}^2+z^2]}{F_{II}^3\sqrt{F_{II}^2+2(u_Iu_{II})zF_{II}+z^2}}. \tag{19}$$

Аналогично

$$\frac{d^2\Pi'(F_I)}{dF_I^2} = \frac{\Phi_{II}}{2}\cdot\frac{[2F_I^3+\big((u_Iu_{II})/z\big)F_I^2+(1/z^2)]}{F_I^3\sqrt{F_I^2+2\big((u_Iu_{II})/z\big)F_I+(1/z^2)}}. \tag{20}$$

Из выражений (19), (20) очевидно, что они положительны при положительных решениях. Это означает, что в случае, когда оба решения $F_I, F_{II} > 0$, мы будем иметь минимум функции П. В случае отрицательных решений не имеется такой же безусловной определенности, как в случае положительных. Здесь едва ли можно обойтись без конкретных решений уравнения экстремума.

4. АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ

Решения уравнений (9) и (10), записанные в форме Кардано или в тригонометрической форме громоздки и неудобны для последующих рассмотрений. С другой стороны, анализ многих экспериментальных данных и исследование асимптотических свойств допускают упрощения, связанные с выделенными кинематическими зонами, в частности, связанные с малыми значениями величины z. В таком случае ($z^2 << 1$) в уравнении (10) можно пренебречь свободным членом, и оно принимает вид

$$F_{II}[F_{II}^2+(u_Iu_{II})zF_{II}-(u_Iu_{II})z]=0. \tag{21}$$

В результате получаем следующие решения:

$$F_{II}^{(1)} = (u_Iu_{II})z\Big(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{(u_Iu_{II})z}}\Big) > 0, \tag{22}$$

$$F_{II}^{(2)} = (u_Iu_{II})z\Big(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{(u_Iu_{II})z}}\Big) < 0. \tag{23}$$

Третье решение $F_{II}^{(3)}$ — очевидно есть малая величина, малость которой связана с малостью z. Для более определенного выбора ее, включая знак, воспользуемся известными соотношениями [5] между коэффициентами уравнения и его корнями. В частности, для кубичного уравнения имеем

$$F_{II}^{(1)}F_{II}^{(2)}F_{II}^{(3)} = z^2,$$

откуда, учитывая (22), (23)

$$F_{II}^{(3)} = -\frac{z}{(u_Iu_{II})} < 0. \tag{24}$$

С использованием закона сохранения энергии (11) уравнение (21) преобразуется к виду

$$\frac{1}{F_I}[F_I^2 - F_I - \frac{1}{(u_I u_{II})z}] = 0 \qquad (25)$$

Его решения

$$F_I^{(1)} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{(u_I u_{II})z}} > 0, \qquad (26)$$

$$F_I^{(2)} = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{(u_I u_{II})z}} < 0. \qquad (27)$$

Повторяя все сказанное об $F_{II}^{(3)}$, получаем

$$F_I^{(3)} = -\frac{(u_I u_{II})}{z} < 0. \qquad (28)$$

Естественно, что при этом равенства

$$F_I^{(1)} F_{II}^{(1)} = 1, \qquad F_I^{(2)} F_{II}^{(2)} = 1, \qquad F_I^{(3)} F_{II}^{(3)} = 1$$

выполняются точно. Поэтому точно выполняются соотношения $\Pi'(F_I^{(i)}) = \Pi''(F_{II}^{(i)})$. Тем самым установлено соответствие между решениями уравнения экстремума, согласующимися с законом сохранения энергии.

Как было найдено выше, в случае положительных решений $(F_I^{(1)}, F_{II}^{(1)} > 0)$ функция Π принимает минимальное значение. Из явного вида решений (22), (26) и выражений (13), (14) следует, что зависимость от начальной энергии определяется множителями типа Φ_I или Φ_{II}. Тогда как все остальные множители зависят фактически от поперечного импульса p_T. Это очевидно из уравнений (21), (25) и того, что $(u_I u_{II})z = 1 \pm m_1/m_T$ для случая $y = Y$. Асимптотическое поведение величин, определяющих поведение сечения (1), таких, как N_I, N_{II}, Π в основном повторяет то, которое отмечается в работе [2], хотя и появляется некоторое различие. Так, например, в области фрагментации ядра II при $CoshY \to \infty$ получаем

$$N_I^{(1)} = (F_I^{(1)} + 1)\Phi_{II} \simeq [3/2 + \sqrt{1/4 + 1/\beta}] \cdot \frac{(m_1/m_0)[m_T/m_1 \pm 1]}{[Cosh2Y - 1]} \to 0,$$

где $\beta = (u_I u_{II})z \to (1 \pm m_1/m_T)$. Здесь знак $(+)$ соответствует рождению антиядер и знак $(-)$ — ядерных фрагментов.

При этом, в отличие от случая $y = 0$ (см. [2]), N_{II} стремится к конечному пределу, зависящему от m_T:

$$N_{II}^{(1)} = (F_{II}^{(1)} + 1)\Phi_I \simeq [\beta(-1/2 + \sqrt{1/4 + 1/\beta}) + 1](m_T/m_0).$$

На основе (14), (23) получаем следующее асимптотическое выражение для обобщенного параметра подобия

$$\Pi = \frac{[\beta(-1/2 + \sqrt{1/4 + 1/\beta} + 1](m_T/m_0)}{2\beta(-1/2 + \sqrt{1/4 + 1/\beta})} \cdot \sqrt{\beta[\beta(-1/2 + \sqrt{1/4 + 1/\beta}) + 1]}.$$

Таким образом, как и в работе [2], асимптотическое значение П является ограниченной положительной величиной, зависящей от поперечного импульса. Поэтому основные качественные результаты совпадают как для быстрот $y \sim 0$, так и для $y \sim Y$.

Подстановка отрицательных решений $(F_I^{(3)}, F_{II}^{(3)} < 0)$ в выражения $(13), (14)$ или в $(17), (18)$ приводит к тому, что подкоренные выражения становятся безусловно отрицательными, а сама функция П комплексной. Поэтому эти решения не будут приниматься во внимание. Такое же положение создается в случае решений $(F_I^{(2)}, F_{II}^{(2)} < 0)$ и $\Delta = +m_1$. Если же $\Delta = -m_1$, то при достаточно малых p_T существует узкая энергетическая область, где $d^2\Pi''/dF_{II}^2 > 0$. Но следует помнить, что это может оказаться результатом сделанного приближения, когда z^2 было опущено в кубичном уравнении. В таком случае потребуются более точные вычисления.

В заключение автору приятно выразить признательность академику А.М. Балдину за введение в проблематику релятивистской ядерной физики и постановку конкретных задач.

Литература

1. Baldin A.A., Baldin A.M. — Particles and Nuclei, 1998, v.29, p.557.
2. Baldin A.M., Malakhov A.I. — JINR Rapid Communication, 1998, No.1[87]-98, p.5.
3. Балдин А.М. — Частное сообщение.
4. Малахов А.И. — Труды Международного совещания «Релятивистская ядерная физика — от сотен МэВ до ТэВ» (Болгария, Варна 26—31 мая 1998). ОИЯИ Д1,2-98-215, Дубна 1998 с.7.
5. Корн Г., Корн Т. — Справочник по математике, 2-е изд. М.: «Наука» 1970.
6. Немыцкий В.В., Слудская М.И., Черкасов А.Н. — Курс математического анализа, 2-е изд. т.2, М.: Гостехиздат, 1957.
7. Kosmachev O.S. — To be published in: Proc. XIV Int. Seminar on High Energy Physics Problems (Dubna, 17—22 August 1998).

Рукопись поступила 30 апреля 1999 года.